

Exercice 1

- 1/ Classer par ordre croissant les nombres: $a = \sqrt[3]{2}$; $b = \sqrt[4]{2}$ et $c = \sqrt{2}$.
- 2/ Résoudre dans \mathbb{R} : (E) $4\sqrt{2} + ((\sqrt{2}-1)x - x^2)^5 = 0$
- 3/ Calculer :
 (a) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1} - 2}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{5}}{\sin(x)}$
- 4/ Montrer que l'équation: $\sqrt{3}x^5 - \sqrt{2}x^2 + \sqrt{6}x - 1 = 0$ admet une solution dans: $]0, 1[$

Exercice 2

Soit g la fonction définie par:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad g(x) = 3\sqrt{x} - x^2.$$

- 1°/ Vérifier que: $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g'(x) = \frac{3 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.
- 2°/ Calculer: $g'(1)$ puis déterminer une équation de la tangente au point $x_0 = 1$.
- 3°/ Résoudre dans \mathbb{R} l'équation: $g'(x) = 0$.
- 4°/ Montrer que g admet un extremum au point d'abscisse $x_0 = \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{3x-1}{5x-10}$

- 1°/ Déterminer D l'ensemble de définition de f .
- 2°/ Étudier la continuité de f sur $I =]2, +\infty[$
- 3°/ f est-elle continue au point $x_0 = 2$? (justifier)
- 4°/ Soit h la restriction de f sur $I =]2, +\infty[$.
- 4°-a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J .
- 4°-b) Comparer $h^{-1}(1)$ et $h^{-1}(2)$.
- 4°-c) Déterminer J et calculer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- 4°-d) Dresser le tableau de variation de h^{-1} sur J .
- 5°/ Calculer $h(3)$ et $(h^{-1})'(\frac{8}{5})$.

Correction du DS [modèle] n° 2

ex. 1 1) $a = \sqrt[3]{2}$; $b = \sqrt[4]{2}$ et $c = \sqrt[2]{2}$

$12 = 3 \times 4$ est un multiple (G.C.D.)

de: 3; 4 et 2 donc:

$$a^{12} = (\sqrt[3]{2})^{12} = \sqrt[3]{2^{3 \times 4}} = (\sqrt[3]{2^3})^4 = 2^4$$

(car: $\sqrt[n]{x^n} = x$ si $x \geq 0$)

$$b^{12} = (\sqrt[4]{2})^{12} = (\sqrt[4]{2^4})^3 = 2^3$$

$$c^{12} = (\sqrt[2]{2})^{12 \times 6} = 2^6$$

on a par ordre croissant \uparrow :

$$2^3 < 2^4 < 2^6 \text{ donc } b^{12} < a^{12} < c^{12}$$

et comme a ; b et c sont positifs

alors:

$$b < a < c$$

Req: $\forall x \geq 0 \quad \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

2) (E): $4\sqrt{2} + ((\sqrt{2}-1)x - x^2)^5 = 0$

$$\Leftrightarrow ((\sqrt{2}-1)x - x^2)^5 = -4\sqrt{2}$$

on remarque que: $(\sqrt{2}-1)x - x^2 < 0$

(car: $-4\sqrt{2} < 0$)

Le signe de: $(\sqrt{2}-1)x - x^2$:

on a: $(\sqrt{2}-1)x - x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow ((\sqrt{2}-1) - x)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}-1 \text{ ou } x = 0$$

x	$-\infty$	0	$\sqrt{2}-1$	$+\infty$
$(\sqrt{2}-1)x - x^2$	-	0	+	-

(-)
(-)

donc $D_E =]-\infty; 0[\cup]\sqrt{2}-1; +\infty[$ 1

Soit $x \in D_E$; on a:

$$(E) \Leftrightarrow -((\sqrt{2}-1)x - x^2)^5 = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (-(\sqrt{2}-1)x + x^2)^5 = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -(\sqrt{2}-1)x + x^2 = \sqrt[5]{4\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2}-1)x = \sqrt{2}$$

(car: $\sqrt[5]{4\sqrt{2}} = \sqrt[5]{2^2 \sqrt{2}} = \sqrt[5]{((\sqrt{2})^2)^2 \sqrt{2}}$
 $= \sqrt[5]{\sqrt{2}^4 \times \sqrt{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{2}^5} = \sqrt{2}$)

$$\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{2}-1)^2 - 4(-\sqrt{2})$$

$$= \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} + 1^2 + 4\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} + 1^2 = (\sqrt{2}+1)^2 > 0$$

deux solutions:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}-1 - (\sqrt{2}+1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \in D_E$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}-1 + \sqrt{2}+1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \in D_E$$

l'ensemble des solutions:

$$S_E = \{-1; \sqrt{2}\}$$

3) a) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1} - 2}$

directement on trouve: $\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{\sqrt{3+1} - 2}$

c-à-d: $\frac{\sqrt[3]{3^3} - \sqrt{3}}{2-2} = \frac{0}{0}$ F.I

on a :

$$\frac{\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1} - 2} = \frac{(\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3})(\sqrt{x^2+1} + 2)}{(\sqrt{x^2+1} - 2)(\sqrt{x^2+1} + 2)} = \frac{(\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3})(\sqrt{x^2+1} + 2)}{(\sqrt{x^2+1} - 2)(\sqrt[3]{3x} + \sqrt{3}\sqrt[3]{3x} + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{(3x - 3\sqrt{3})(\sqrt{x^2+1} + 2)}{(x^2 - 3)(\sqrt[3]{3x} + \sqrt{3}\sqrt[3]{3x} + 3)}$$

$$= \frac{3(x - \sqrt{3})(\sqrt{x^2+1} + 2)}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(\sqrt[3]{3x} + \sqrt{3}\sqrt[3]{3x} + 3)}$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1} - 2} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3(\sqrt{x^2+1} + 2)}{(x + \sqrt{3})(\sqrt[3]{3x} + \sqrt{3}\sqrt[3]{3x} + 3)}$$

$$= \frac{3 \times (2 + 2)}{2\sqrt{3}(\sqrt[3]{3} + \sqrt{3}\sqrt[3]{3} + 3)}$$

$$= \frac{3 \times 4}{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{3} + 3)} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{5}}{\sin(x)} = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5}}{0}$ F.I

on a : $\frac{\sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{5}}{\sin(x)}$

$$= \frac{(\sqrt[3]{x+5})^3 - (\sqrt[3]{5})^3}{\sin(x) \left[(\sqrt[3]{x+5})^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{x+5} + (\sqrt[3]{5})^2 \right]}$$

$$= \frac{x+5-5}{\sin(x) \left(\sqrt[3]{x+5}^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{5}^2 \right)}$$

$$= \frac{x}{\sin(x)} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x+5}^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{5}^2}$$

on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{5}}{\sin(x)} =$

2

$$= 1 \times \frac{1}{\sqrt[3]{5}^2 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5}^2}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{5}^2 \times \sqrt[3]{5}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5}}{3 \times \sqrt[3]{5}^3} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{5}}{15}}$$

4) posons : $f(x) = \sqrt{3}x^5 - \sqrt{2}x^3 + \sqrt{6}x - 1$

f est continue sur \mathbb{R}

donc elle est continue sur $[0, 1]$

on a : $f(0) = -1 < 0$

$$f(1) = \underbrace{\sqrt{3} - \sqrt{2}}_{>0} + \underbrace{\sqrt{6} - 1}_{>0} > 0$$

donc : $f(0) \times f(1) < 0$

d'après T.V.I l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $]0, 1[$

Ex. 2 $\forall x \in \mathbb{R}^+ g(x) = 3\sqrt{x} - x^2$

1° $(\forall x > 0) g'(x) = (3\sqrt{x} - x^2)'$

$$= 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2x(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$$(\forall x > 0) g'(x) = \frac{3 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

2° $g'(1) = \frac{3 - 4 \times 1 \times \sqrt{1}}{2 \times \sqrt{1}} = \frac{3 - 4}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

une équation de la tangente à (Cg) au point d'abscisse $x_0 = 1$ est :

$$y = g'(1)(x - 1) + g(1)$$

$$y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 3 - 1$$

donc :

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$$

3°/ Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0 \text{ et } x > 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 4x\sqrt{x} = 0 \text{ et } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} = \frac{3}{4} \text{ et } x > 0$$

$$\text{on a: } x\sqrt{x} = \sqrt{x}^2 \times \sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$$

$$\text{donc: } x\sqrt{x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x}^3 = \frac{3}{4}$$

$$\text{ce qui donne: } \sqrt{x} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$\text{donc: } \sqrt{x}^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$$

$$\text{donc: } x = \sqrt[3]{\frac{9}{16}} \text{ est la solution de } g'(x) = 0.$$

4°/ le tableau de signe de $g'(x)$:

x	0	$\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	-

g' s'annule en $\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$ et change

de signe en ce point donc

g admet un extremum (valeur maximale) au point d'abscisse $x = \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$

ex. 3 $f(x) = \frac{3x-1}{5x-10}$

1°/ $x \in D \Leftrightarrow 5x-10 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{10}{5}$

$$\text{donc: } D = \mathbb{R} - \{2\}$$

2°/ f est une fonction rationnelle

donc f est continue sur D

et comme $I \subset D$ (car $2 \notin I$)

donc f est continue sur I .

Req: $D =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

donc $I \subset D$

3°/ non car: f n'est pas définie en 2. ($2 \notin D$)

4°/ on a: $\forall x \in I =]2; +\infty[; h(x) = \frac{3x-1}{5x-10}$

4-a/ h est continue sur I .

$$(\forall x \in I); h'(x) = \left(\frac{3x-1}{5x-10}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}}{(5x-10)^2}$$

$$= \frac{3(-10) - 5(-1)}{(5x-10)^2} = \frac{-25}{(5x-10)^2} < 0$$

donc h est strictement \downarrow sur I

donc h admet une fonction réciproque

h^{-1} définie sur $J = h(I)$.

4-b/ on a h est str \downarrow

donc h^{-1} est aussi str \downarrow

comme $\begin{cases} 1 < 2 \\ h^{-1} \downarrow (\text{str}) \end{cases}$ alors: $h^{-1}(1) > h^{-1}(2)$

4-c/ $J = h(]2; +\infty[)$

$$=]\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{5x-10} = \frac{3}{5}$$

et on a:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$5x-10$	-	0	+

donc: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (5x-10) = 0^+$

donc: $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \frac{3 \times 2 - 1}{0^+} = +\infty$

ainsi:

$$J =]\frac{3}{5}; +\infty[$$

Calcul de $h^{-1}(x)$:

Soient $x \in]\frac{3}{5}; +\infty[$ et $y \in]2; +\infty[$

$$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = h(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y-1}{5y-10} = x \Leftrightarrow 3y-1 = x(5y-10)$$

$$\Leftrightarrow y(3-5x) = 1-10x$$

$x > \frac{3}{5}$ donc $5x > 3$ donc $3-5x \neq 0$

on trouve : $y = \frac{1-10x}{3-5x}$

$$(\forall x \in J) \quad h^{-1}(x) = \frac{1-10x}{3-5x}$$

4° d) $h \searrow$ sur I donc $h^{-1} \searrow$ sur J

Tableau de variation de h^{-1} sur J

x	$\frac{3}{5}$	$+\infty$
h^{-1}	$+\infty$	2

5°) $h(3) = \frac{3 \times 3 - 1}{5 \times 3 - 10} = \frac{8}{5}$

on a : $(h^{-1})'(\frac{8}{5}) = (h^{-1})'(h(3))$

$$= \frac{1}{h'(3)}$$

(car : $(h^{-1})'(h(a)) = \frac{1}{h'(a)}$)

on a : $h'(3) = f'(3) = \frac{-25}{(5 \times 3 - 10)^2}$

$$= \frac{-25}{(5)^2} = -1$$

donc : $(h^{-1})'(\frac{8}{5}) = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$

★ ★ ★